OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010,
Clasa a VIII-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

Observăm că $m, n, p \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

a) Triplete de forma $(\sqrt{m}, \sqrt{n}, 5)$ din B se obţin pentru $p = 25$, $n = 16$, $m \in \{1, 4, 9\}$; $n = 9$, $m \in \{1, 4\}$; $n = 4$, $m = 1$. Deci sunt 6 triplete......2p

b) Observăm că $p \geq 9$. Astfel, pentru $p = 9, m = 4, n = 1$ avem un triplet, pentru $p = 16$ avem $1 + 2$ triplete, pentru $p = 25$ sunt $1 + 2 + 3$ triplete, s.a.m.d. În total se obţin 120 triplete......4p

c) Doar 2 triplete $(3, 4, 5)$, şi $(3, 4, 5)$.........1p

SUBIECTUL II

"$\Longleftarrow$" Dacă $AB = 2 \cdot CD$, cum $\triangle DOC \sim \triangle BOA \Longrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2DC}{DC} = 2$......1p

Fie M mijlocul segmentului BE, G fiind centrul de greutate al $\triangle ABE$, rezultă $\frac{AG}{GM} = 2$.....1p

Obţinem, deci, $\frac{OA}{OC} = \frac{AG}{GM}$ şi aplicând reciproca teoremei lui Thales în $\triangle AMC$ avem $OG \| CM$, dar $MC \subset (BCE)$, deci $OG \| (BCE)$.....2p

"$\Longrightarrow$" Dacă $OG \| (BCE)$ înseamnă că orice plan care trece prin OG şi nu e paralel cu (BCE), îl intersectează pe acesta după o dreaptă paralelă cu OG. Cum $(ACM) \cap (BCE) = CM$, rezultă că $OG \| CM$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle ACM$, rezultă că $\frac{OA}{OC} = \frac{AG}{GM} = 2$. Dar $\triangle DOC \sim \triangle BOA \Longrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2DC}{DC} = 2$, şi $AB = 2 \cdot CD$......3p

SUBIECTUL III

Ecuaţia se scrie $x - 2 + y - 3 + z - 4 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{y-3} - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{z-4} + 9 + 16 + 25 = 0$ 3p

sau $(\sqrt{x-2} - 3)^2 + (\sqrt{y-3} - 4)^2 + (\sqrt{z-4} - 5)^2 = 0$.....3p.

De aici deducem $x = 11$, $y = 19$, $z = 29$.....1p

SUBIECTUL IV

1) Fie $AB = 2k$, $BC = 2k + 2$, $AC = 2k + 4$, $k \in \mathbf{N}^*$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ACB$ obţinem $k = 3$, deci $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ACC'$ obţinem $AC' = 2\sqrt{89} > 18$, $BC = 8$, $AC = 10$, deci este posibil să introducem în el un termometru de 18cm astfel încât acesta să fie în întregime în lichid.......2p

2) Din $CC'\perp(ABC)$, $CE\perp BE$, $CE, BE\subset(ABC)$ rezultă, conform teoremei celor trei perpendiculare că $EC'\perp BE$. Din $EC'\perp BE$ şi $BE\perp AC$, $C'E, AC\subset(AA'C)$ rezultă $BE\perp(A'AC)$ şi cum $BE\subset(C'BE)$ deducem că $(C'EB)\perp(A'AC)$, deci măsura unghilui format de planele $(BC'E)$ şi $(A'AC)$ este de $90°$.......2p

3) Fie $EE'\|AA'$, $E'\in(A'C')$.

Cum $EE'\|BB'$ şi $EE'\equiv BB'$ rezultă $B'E'\|BE$. Din $B'E'\|BE$ şi $BE\subset(EBC')$ rezultă că $d\big(B',(BEC')\big)=d\big(E',(BEC')\big)$.

Fie $FE'\perp C'E$, $F\in(EC')$. Din $FE'\perp C'E$, $(C'EB)\perp(A'AC)$ şi $(C'EB)\cap(A'AC)=C'E$, rezultă că $E'F\perp(C'EB)$, deci $d\big(B',(BEC')\big)=E'F$.

Aplicând teorema catetei în $\triangle ACB$, obţinem $CE=\frac{32}{5}=C'E'$ şi aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle C'EE'$, obţinem $C'E=\frac{16\sqrt{29}}{5}$ şi $E'F=\frac{32\sqrt{29}}{29}$......3p